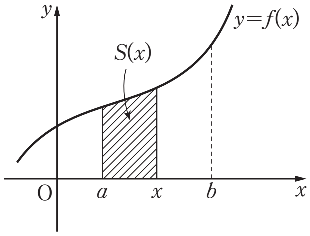
第 32 講　微分法・積分法(5)

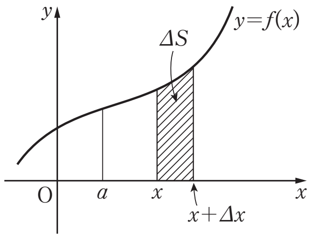
【基礎確認事項】

［1］　面積

定積分を使って実際に面積の計算ができることを示す.



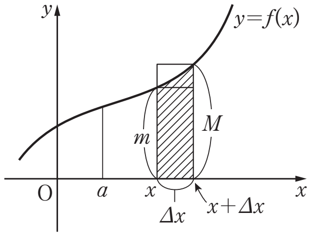
□右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，
$y=f(x)$ と x 軸の間で x 座標が a から x までの部分の
面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で x の関数である.
この面積 $S(x)$ が $f(x)$ の不定積分の１つであることを示す.



□ x の増分 Δx に対する面積 $S(x)$ の増分を ΔS とすると

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$$

であり，$\Delta x > 0$ のとき，ΔS は右図斜線部分である.



□ x から $x+\Delta x$ までの区間における $f(x)$ の最大値を M,
最小値を m とし，ΔS を横の長さが Δx，縦の長さが M,
m の２つの長方形の面積と比較すると

$$\Delta x \cdot m \leqq \Delta S \leqq \Delta x \cdot M$$

すなわち　$m \leqq \dfrac{\Delta S}{\Delta x} \leqq M$　……①　である.

$\Delta x < 0$ のときは　$(-\Delta x)\cdot m \leqq S(x) - S(x+\Delta x) = -\Delta S \leqq (-\Delta x)\cdot M$ より，両辺を $-\Delta x\,(>0)$ で割ることにより①を得る.

①において，$\Delta x \to 0$ とすると

$$m \to f(x) \qquad M \to f(x) \qquad \frac{\Delta S}{\Delta x} \to S'(x) \quad \text{より} \quad f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$$

すなわち $S'(x) = f(x)$　つまり　$S(x)$ は $f(x)$ の不定積分の１つである.
また，$S(a)=0$ であることから，x 座標が a から b までの面積 S は

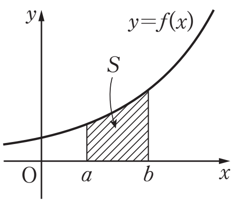
$$S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

である.

定積分と図形の面積

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき
$y=f(x)$ と x 軸および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の
面積 S は

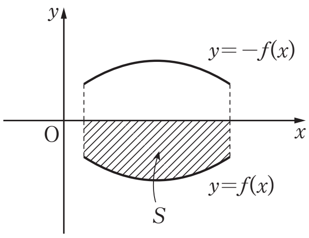
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



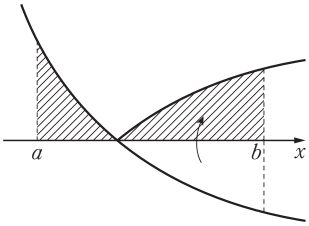
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

□次に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき，面積 S は右図のように x 軸に関して対称に移動した図形の面積に等しいので，

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx \quad \text{である．}$$



□ x が a から b まで変化するときに，$f(x)$ の値が正になったり負になったりする場合は，$f(x) \geqq 0$ の部分はそのまま積分し，$f(x)<0$ の部分は，$-f(x)$ を積分し，それらを合わせると面積となる．



これは，$y=|f(x)|$ と x 軸および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分に等しい．よって以下のことがいえる．

> $a<b$ のとき，$y=f(x)$ と x 軸および $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は
>
> $$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

⇒　C&U 1 2

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1 (1) 関数 $y=x^2+1$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 曲線　$y=x(x+1)(x-2)$ と x 軸との囲む 2 つの部分の面積の和を求めよ．

2 $\int_0^2 |x^2+x-2|dx$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　微分法・積分法(5)

1 (1) 等式 $\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C$ （C は定数） を証明せよ.

(2) 曲線 $y=x^2-2x+1$ と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　(1)　等式 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を証明せよ.

(2)　曲線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|dx$　とするとき，$f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　微分法・積分法(5)

(1)　$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である.

(2)　$y=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}$ と x 軸，y軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である.

(3)　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}|x-a|dx$ は　$t=a-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　最小値 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ をとる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

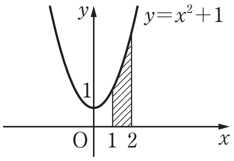
第 32 講　微分法・積分法(5)

【CHECK & UP】

1 (1)　求める面積は

$$\int_1^2 (x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\mathbf{\frac{10}{3}}$$



面積を積分を使って求める練習．積分を求める範囲においてグラフが x よりすべて上かどうかを判断してからインテグラルの計算に入ろう．x 軸より下の場合は，関数全体に－をつけることにより x 軸より上に折り返した x 軸対称のグラフを用いて面積を求めていく．

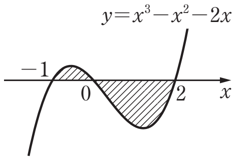
(2)　$y=x(x+1)(x-2)=x^3-x^2-2x$　より，

求める面積は

$$\int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x)dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{37}{12}}$$



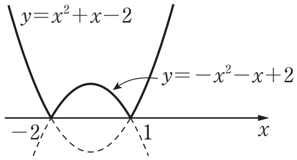
2　$y=|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$ のグラフより

$$\int_0^2 |x^2+x-2|dx$$

$$=\int_0^1(-x^2-x+2)dx+\int_1^2(x^2+x-2)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-0+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\mathbf{3}$$



インテグラルすなわち面積と判断するのは早合点であるが，被積分関数の全体に絶対値がついている場合は，そのグラフがすべて x 軸より上に存在するため，インテグラルは面積と同義となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　微分法・積分法(5)

1 (1)　等式　$\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 + C$　（C は定数）　を証明せよ．

(2)　曲線　$y=x^2-2x+1$　と x 軸，および直線 $x=3$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　C' を定数とすると

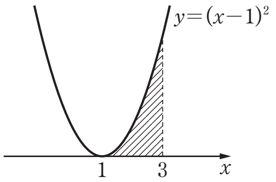
$$\int (x-\alpha)^2 dx = \int (x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx = \frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3)+\frac{\alpha^3}{3}+C' = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha^3}{3}+C'$$

$\frac{\alpha^3}{3}+C'$ は定数より　$\int (x-\alpha)^2 dx = \frac{1}{3}(x-\alpha)^3+C$（$C$ は定数）が成り立つ．

(2)　求める面積は

$$\int_1^3 (x^2-2x+1)dx = \int_1^3 (x-1)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 0 = \mathbf{\frac{8}{3}}$$



2 (1)　等式　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　を証明せよ．

(2)　曲線 $y=x^2-4x-1$ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1)　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$

$$=\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

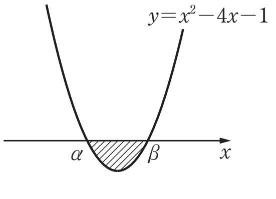
(2)　$x^2-4x-1=0$　より　$x=2\pm\sqrt{5}$

よって　$\alpha=2-\sqrt{5}$，$\beta=2+\sqrt{5}$ とおくと，求める面積は

$$\int_\alpha^\beta -(x^2-4x-1)dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\} = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{5})^3 = \mathbf{\frac{20\sqrt{5}}{3}}$$

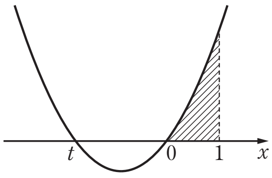


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|dx$　とするとき，$f(t)$ の最小値と最小値を与える t の値を求めよ．

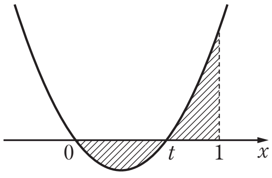
$y=|x^2-tx|=|x(x-t)|$

$t \leqq 0$ のとき



$$f(t)=\int_0^1 (x^2-tx)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{t}{2}$$

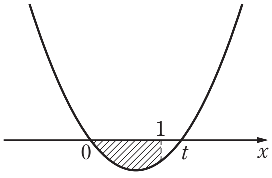
$0<t<1$ のとき



$$f(t)=\int_0^t (-x^2+tx)dx+\int_t^1 (x^2-tx)dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{t}{2}x^2\right]_t^1=\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+\frac{1}{3}$$

$t \geqq 1$ のとき



$$f(t)=\int_0^t (-x^2+tx)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{t}{2}x^2\right]_0^t=\frac{t}{2}-\frac{1}{3}$$

よって　$f(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{3} & (t \leqq 0) \\ \dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{3} & (0<t<1) \\ \dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{3} & (1 \leqq t) \end{cases}$

$t \leqq 0$ のとき$f(t)$ は単調減少，$1 \leqq t$ のとき$f(t)$ は単調増加．

$0<t<1$ のとき

$$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	

以上より　**$f(t)$ の最小値は　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$　（$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　微分法・積分法(5)

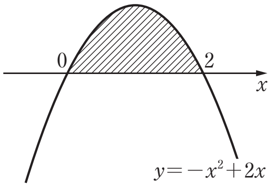
(1)　$y=-x^2+2x$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である.

(2)　$y=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}$ と x 軸，y軸で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である.

(3)　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}|x-a|dx$ は　$t=a-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　最小値 $\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ をとる.

(1)　求める面積は

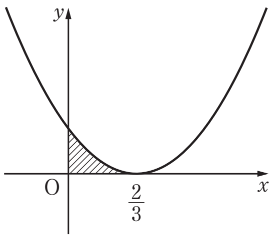
$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=-\int_0^2 x(x-2)dx=\frac{1}{6}\times 2^3=\mathbf{\frac{4}{3}}$$



(2)　求める面積は

$$\int_0^{\frac{2}{3}}\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)dx=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2dx=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^3\right]_0^{\frac{2}{3}}$$

$$=0-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^3=\mathbf{\frac{8}{81}}$$



(3)　$t+1\leqq a$　つまり　$t\leqq a-1$ のとき

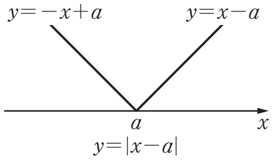
$$f(t)=\int_t^{t+1}(-x+a)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_t^{t+1}=-t+a-\frac{1}{2}$$

$t\leqq a\leqq t+1$　つまり　$a-1\leqq t\leqq a$ のとき

$$f(t)=\int_t^a(-x+a)dx+\int_a^{t+1}(x-a)dx$$

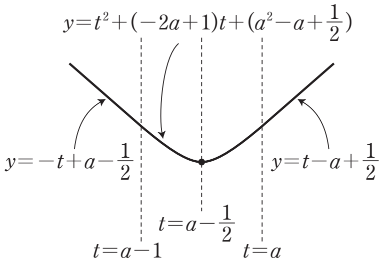
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+ax\right]_t^a+\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_a^{t+1}$$

$$=t^2+(-2a+1)t+\left(a^2-a+\frac{1}{2}\right)=\left\{t-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\frac{1}{4}$$



$a\leqq t$ のとき　$f(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}(x-a)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-ax\right]_t^{t+1}=t-a+\frac{1}{2}$

よって　$f(t)$ は $t=a-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $\mathbf{\dfrac{1}{4}}$ をとる.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。